

Medición de g usando un péndulo simple

Salinas, Melanie Giselle
melanie.salinas.62013@gmail.com

Cagliolo, Camilo
camilocagliolo14@gmail.com

Santos Cabrera, Nicolás.
nico.santosca27@gmail.com

Resumen.

En este trabajo se midió la aceleración de la gravedad mediante el uso de un péndulo simple, utilizando dos metodologías distintas, con el fin de intentar probar qué fluctuaciones aleatorias pudieran haber en el armado.

1. Introducción.

La fuerza de gravedad, o peso, es la fuerza con la cual el planeta Tierra atrae a los cuerpos cercanos hacia ella. No habiendo resistencia del aire, se encuentra que todos los cuerpos caen con la misma aceleración y, si la distancia recorrida no es demasiado grande, la aceleración es constante en toda la caída. La aceleración de un cuerpo que cae libremente se llama aceleración gravitatoria. [1]

Un péndulo simple consiste en un punto material suspendido de un hilo inextensible y sin peso, que puede oscilar en torno a una posición de equilibrio.

La distancia entre el objeto al punto de suspensión se denomina longitud del péndulo simple. Nótese que un péndulo matemático no tiene existencia real, ya que los puntos materiales y los hilos sin masa son entes abstractos. En la práctica se considera como un péndulo simple a un cuerpo de reducidas dimensiones suspendido de un hilo inextensible y de masa despreciable comparada con la del cuerpo. En el laboratorio emplearemos como péndulo simple un sólido metálico colgado de un fino hilo de cobre. (Figura 1)

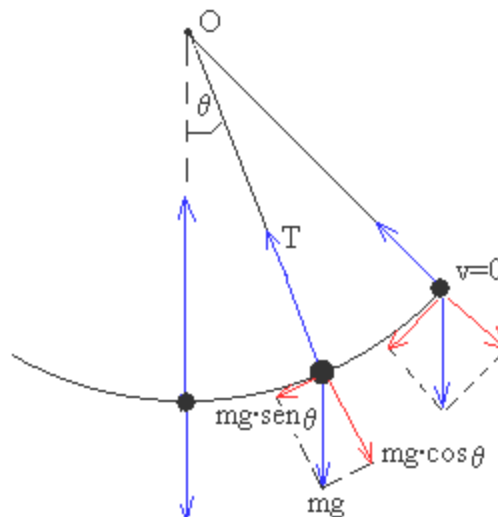


Figura 1: Péndulo simple.

El movimiento de un péndulo cualquiera es descrito por el desarrollo en series de Taylor:

$$T(\theta) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{15}{48}\right)^2 \text{sen}^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots \right] (1)$$

Si el péndulo matemático describe un movimiento armónico simple en torno a su posición de equilibrio, es decir, la amplitud del péndulo es lo suficientemente pequeña, su periodo de

oscilación alrededor de dicha posición está dada por la ecuación:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (2)$$

Donde L representa la longitud medida desde el punto de suspensión hasta la masa puntual y g es la aceleración de la gravedad en el lugar donde se ha instalado el péndulo [2].

Despejando en la ecuación (2) se obtiene:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad (3)$$

Teniendo en cuenta que la gravedad que se utiliza a menudo ($9,8 \text{ m/s}^2$) es un promedio de la gravedad total terrestre, para el análisis de los datos se utilizó la gravedad local, la cual tiene un valor de $9,799165 \text{ m/s}^2$. [3]

En este trabajo se montó un experimento para medir g de manera indirecta a partir del período con el que oscila un péndulo, empleando un fotosensor. Por otro lado, se realizó la misma determinación armando y desarmando el dispositivo antes de cada medida, para intentar cuantificar las fluctuaciones al azar introducidas en el proceso.

2. Metodología.

Para desarrollar este experimento se eligieron un hilo, cuyo largo es $l = (1,002 \pm 0,001) \text{ m}$ y una pesa esférica de diámetro $D = (25,50 \pm 0,03) \text{ mm}$ para la masa pendular. El valor de L utilizado para calcular g con la ecuación (2) es $L = l + \frac{D}{2}$. El período del péndulo depende de la amplitud θ según la expresión (1). Teniendo en cuenta el largo elegido, se calculó cuál era el ángulo máximo sobre el que sería aproximadamente válida la ecuación (2) haciendo que el error introducido por los términos que dependen de la amplitud fuera menor a la incertidumbre introducida por las resoluciones instrumentales. Este cálculo dio como resultado un ángulo máximo de $0,07$ radianes (ver anexo). Para estar seguros de estar dentro del intervalo de validez, se eligió apartar el péndulo de su posición de equilibrio un ángulo de aproximadamente $0,04$ radianes, que dado el largo cercano a un metro, corresponde a cuatro centímetros de arco del círculo con centro en el punto de suspensión y radio L .

Para construir el péndulo se ató una masa esférica de masa $m \approx 90 \text{ g}$ en el extremo de un hilo de alambre de cobre, y se colgó de la bandeja de chapa de zinc del techo mediante un gancho doblado a mano con pinzas. Se ubicó un fotosensor a la altura del centro de masa de la masa pendular, a ojo. Para que el fotosensor quede situado a la altura necesaria se utilizaron cuerpos de madera sobre los cuáles se lo apoyó. Se ubicó una regla sobre el fotosensor, de manera que la línea correspondiente a los 4 centímetros estuviera arriba del láser (Ver Figura 1).

Luego de armar todo el dispositivo experimental, se procedió a desplazar la masa pendular de su eje, de manera que la proyección del vector de desplazamiento sobre la regla ubicada en el fotosensor fuera menor o igual a los 4 centímetros, y así poder asegurar que el ángulo utilizado estuviera dentro del intervalo de validez de la aproximación teórica utilizada.

Una vez oscilando, se dejaron pasar dos oscilaciones completas y se registró el valor del período en la tercera oscilación. Se midió de la misma forma 10 veces seguidas, formando la primera tanda de mediciones de T , y se registraron los valores en una planilla de cálculo. Utilizando dicho programa se calcularon 10 valores de g , además del valor promedio de g utilizando estos 10 valores, y la desviación estándar de su promedio (*Tabla 1*). Su incertidumbre de tipo B (instrumental) basada en las incertidumbres de L y T se calculó según lo indicado en el Anexo 1.

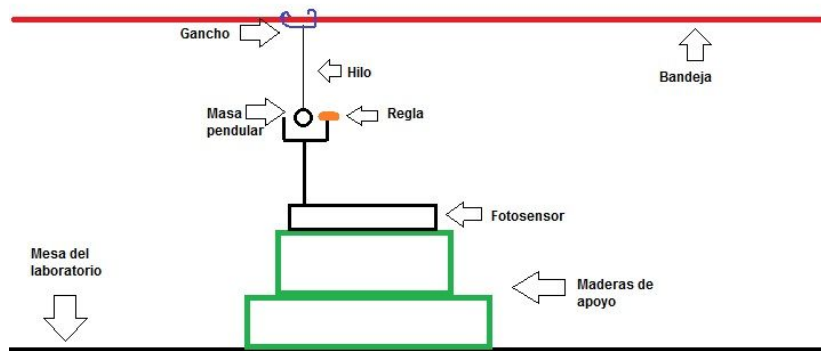


Figura 1: Esquema del arreglo experimental utilizado.

Luego se realizó una segunda tanda de 10 mediciones cambiando el hilo y, sacando y poniendo el gancho cada vez, para ver si los cambios introducidos por esta parte del procedimiento podían influir en el resultado final de g . Se espera que si esta hipótesis es correcta la incertidumbre de tipo A, es decir, originada en las fluctuaciones al azar, se mayor en el segundo caso. El procedimiento de cálculo de g es idéntico al de las mediciones anteriores (*Tabla 2*).

3. Resultados.

Los resultados obtenidos para la primera tanda de mediciones, se expresan en la tabla 1:

n	L(m) ± 0,001	t(s) ± 0,001	g(m/s ²) ± 0.008
1	1,013	2,02	9,801
2	1,013	2,019	9,811
3	1,013	2,021	9,791
4	1,013	2,021	9,791
5	1,013	2,02	9,801
6	1,013	2,019	9,811
7	1,013	2,021	9,791
8	1,013	2,02	9,801
9	1,013	2,02	9,801
10	1,013	2,019	9,811
Promedio		2,02	9,801
$S_{n-1}(\bar{g})$			0,003

Tabla 1

Teniendo en cuenta la incertidumbre tipo B ($0,008 \text{ m/s}^2$) y las incertidumbres de tipo A ($S_{n-1}(\bar{g})$), se obtuvo como resultado:

$$g(95\%) = (9,801 \pm 0,008) \text{ m/s}^2$$

Donde $\bar{g} = 9,80 \text{ m/s}^2$ se obtuvo a partir de 10 mediciones y $0,02 \text{ m/s}^2$ es la incertidumbre total de la medición, calculada como se detalla en el Anexo 2, con un factor de cobertura $k=2$.

Asimismo, los resultados que se obtuvieron a partir de la segunda tanda de mediciones, fueron los que se muestran en la tabla 2:

n	L(m) $\pm 0,001$	t(s) $\pm 0,001$	g(m/s ²) $\pm 0,008$
1	1,028	2,033	9,819
2	1,012	2,018	9,811
3	1,012	2,017	9,82
4	1,012	2,019	9,801
5	1,012	2,015	9,84
6	1,012	2,011	9,879
7	1,012	2,018	9,811
8	1,012	2,014	9,85
9	1,012	2,018	9,811
10	1,012	2,02	9,791
Promedio		2,02	9,823
$S_{n-1}(\bar{g})$			0,008

Tabla 2

Teniendo en cuenta la incertidumbre tipo B ($0,008 \text{ m/s}^2$) y las incertidumbres de tipo A ($S_{n-1}(\bar{g})$), se obtuvo como resultado:

$$g(95\%) = (9,82 \pm 0,02) \text{ m/s}^2$$

Donde $\bar{g} = 9,82 \text{ m/s}^2$ se obtuvo a partir de 10 mediciones y $0,02 \text{ m/s}^2$ es la incertidumbre total de la medición, calculada como se detalla en el Anexo 2, con un factor de cobertura $k=2$.

4. Análisis.

La hipótesis acerca de las incertidumbres introducidas en el armado del péndulo, propuesta en la metodología, fue constatada en los resultados, ya que en la segunda tanda de mediciones, se observa una mayor incertidumbre de tipo A (obtenida por métodos estadísticos) que en la primera tanda de mediciones.

Teniendo en cuenta lo reflexionado en la introducción acerca del valor local de g , [3] el intervalo perteneciente a la primera tanda de mediciones (9,783 ; 9,819), contiene dicho valor.

Para las mediciones obtenidas a partir de la segunda metodología, el intervalo correspondiente (9,80 ; 9,84) no contiene al valor local de g . [3] Esto podría deberse a que se utilizó un factor de cobertura demasiado conservador ($k = 2$). Tomando un $k = 3$ (99% de confiabilidad) el valor local de g [3] sí pertenece al intervalo.

5. Conclusiones.

Se logró medir g mediante un péndulo simple y se logró comprobar que, efectivamente, al montar y desmontar el sistema se observan mayores fluctuaciones en el resultado de las mediciones, lo cual aumenta el valor de la incertidumbre de tipo A (obtenida por medios estadísticos).

El intervalo medido con la segunda metodología no contiene el valor esperado de g [3]. Si bien no se logró identificar la fuente del error, podemos concluir que existe un error de tipo sistemático para el cual no se pudo hallar su origen y magnitud.

6. Referencias.

[1] Resnick-Halliday; Física, parte I; Compañía editorial Continental S.A.; México, 1974.

[2] Péndulo simple. Determinación de la gravedad; departamento de física aplicada; Universidad de Castilla-La Mancha.

https://www.uclm.es/profesorado/ajbarbero/Practicas/02_Pendulo_simple.pdf

[3] Medición obtenida por el Dr. Antonio Introcaso - Grupo de Geofísica - Instituto de Física Rosario.

Anexo 1.

El ángulo máximo de oscilación, se obtuvo mediante:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Considerando que el largo del péndulo es de 1m:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{10}} = 1,98 \equiv 2$$

Se iguala U_B al desarrollo en series de Taylor:

$$6 \times 10^{-4} s = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{3}{8}\right)^2 \text{sen}^4\left(\frac{\theta}{2}\right) + \left(\frac{15}{48}\right)^2 \text{sen}^6\left(\frac{\theta}{2}\right) + \dots \right]$$

Utilizando la aproximación anterior de T y despejando $\text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ (el resto del desarrollo en series de Taylor es despreciable):

$$\frac{6 \times 10^{-4} s}{2s} \cdot 4 = \text{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Despejando θ :

$$2 \arcsen\left(\sqrt{12 \times 10^{-4}}\right) = \theta$$

$4^\circ = \theta \equiv 0,07$

Anexo 2.

La incertidumbre instrumental de g se calculó mediante:

$$U_B(g) = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial L}\right)^2 \left(\frac{\Delta L}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

Desarrollando las derivadas parciales:

$$U_B(g)^2 = \left(\frac{-8\pi^2 L}{T^3}\right)^2 \left(\frac{\Delta T}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{T^2}\right)^2 \left(\frac{\Delta L}{\sqrt{3}}\right)^2$$

reemplazando los valores correspondientes:

$$U_B(g)^2 = \left(\frac{-8\pi^2 \cdot (1,012m)}{(2,02s)^3}\right)^2 \left(\frac{0,001s}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2}{(2,02s)^2}\right)^2 \left(\frac{0,001m}{\sqrt{3}}\right)^2$$

$$U_B(g)^2 = (93,9793145438132513) \cdot (3,333333333 \times 10^{-7}) + (93,6082218576136731) \cdot (3,333333333 \times 10^{-7})$$

$$U_B(g)^2 = 0,00003 + 0,00003$$

$$U_B(g) = \sqrt{0,00003 + 0,00003}$$

$$U_B(g) = 0,0077459666924148 \equiv 0,008$$

La incertidumbre total para cada metodología se obtuvo mediante:

$$U_T^2 = U_A^2 + U_B^2$$

Donde U_A es la incertidumbre debida a fluctuaciones al azar y U_B es la incertidumbre instrumental. Reemplazando cada una para cada metodología, obtenemos:

- Para la primer metodología:

$$U_T^2 = (0,003 \text{ m/s}^2)^2 + (0,008 \text{ m/s}^2)^2$$

$$U_T = \sqrt{(0,000009 \text{ m}^2/\text{s}^4) + (0,000064 \text{ m}^2/\text{s}^4)}$$

$$U_T = 0,008 \text{ m/s}^2$$

- Para la segunda metodología:

$$U_T^2 = (0,008 \text{ m/s}^2)^2 + (0,008 \text{ m/s}^2)^2$$

$$U_T = \sqrt{(0,000064 \text{ m}^2/\text{s}^4) + (0,000064 \text{ m}^2/\text{s}^4)}$$

$$U_T = 0,01 \text{ m/s}^2$$